

一题突破极限理论

经纬考研数学

www.jingweimath.com

考研数学极限理论包括：

1 极限的存在性

左，右极限存在且相等

2 极限的性质，主要是保号性

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, 则存在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta)$, 当 $x \in U$ 时, $f(x) > 0$;

3 连续的概念 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

4 可导性 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在; 左右导数

例 设函数 $f(x)$ 连续, 给出下列四个条件

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$ 存在;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - |f(0)|}{x}$ 存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}$ 存在;

其中能得到“ $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导”的条件个数是 ()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解析: 要得到 $f(x)$ 在 0 点可导, 则由定义: 需要 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 存在。

● 先考察 (3) 选项, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在, 意味着 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$ (第一个知识点)

又因为函数在 0 点连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = |f(0)|$ (第二个知识点); 由此 $f(0) = 0$;

设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x} = A$, 则 $x \rightarrow 0^-$ 时, $A \leq 0$, $x \rightarrow 0^+$ 时, $A \geq 0$, 由此必须 $A=0$ (第三个知识点)

则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x} \frac{f(x)}{|f(x)|} = 0$ (第四个知识点) (3) 正确!

● 考察 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| - f(0) = 0$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = f(0)$;

所以 $f(0) \geq 0$;

当 $f(0) = 0$ 时, 转化为 (3);

$f(0) > 0$ 时, 由连续性和保号性, 存在 0 点的邻域, 使得 $f(x) > 0$, (第五个知识点)

则有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0)$, 可导; 所以 (1) 正确!

- 考察(2) 同理, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - |f(0)| = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = |f(0)| \geq 0$,

存在0 的邻域 使得 $f(x) \geq 0$, 则 $f(0) \geq 0$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-|f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) \text{ 可导}; \quad (2) \text{ 正确!}$$

- 考察 (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在, 若 $f(0) \geq 0$, 前面已经分析, 是正确的;

若 $f(0) < 0$, 则存在 0 点的邻域, 使得 $f(x) < 0$,

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|-|f(0)|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(f(x)-f(0))}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x},$$

所以可得 (4) 也正确, 4个选项都正确, D,