

数学强则科技强的国家强

新编考研数学线性代数综合习题

经纬考研数学

www.jingweimath.com

高分必备

线代综合习题课：

精选面向考试的题型；

提升对基本概念和理论严谨细致的理解；

强调解题思路，和解题方法；

一课解决考研数学线性代数的全部内容；助力考生高分上岸！

习题课结合新编考研数学线性代数精华版网课的内容；

复习要做到有的放矢，纲举目张：

线性代数的纲就是：**线性方程组**

基本概念、基础理论、基本计算： 高分必备基本功

1 行列式：性质与行列式的按行（列）展开；

2 向量的运算：内积（数量积），模，正交，施密特正交化公式；

2 矩阵的运算：乘法，逆， **分块矩阵**；伴随矩阵 A^* ；正交矩阵；

3 矩阵的秩：定义，公式与结论

$$1) \quad r(A) = r(A^T) = r(A^T A); \quad 2) \quad r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\};$$

$$3) \quad r(A + B) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B);$$

4) 若A可逆，则 $r(AB) = r(B)$ ；若 A列满秩，则 $r(AB) = r(B)$ ；若A行满秩，则 $r(BA) = r(B)$ ；

5) 若 $AB=0$ ，则 $r(A) + r(B) \leq n$ (n 是A的列数)；

$$6) \quad r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$$

4 矩阵的初等（行）变换，初等矩阵及其逆阵；

1) 矩阵可经过初等变换变为标准形： $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ；

2) 可逆阵是一系列初等矩阵的乘积；

左（右）乘可逆阵相当于一系列初等行（列）变换；

求逆阵的方法： $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$ ； 以及： $(A, E) \rightarrow (E, A^{-1})$

5 矩阵等价；1) 等价的定义：矩阵 A 可经过一系列初等变换变成矩阵 B ；

2) 等价具有反身性和传递性；

3) A 与 B 等价的充要条件： $PAQ=B$ ， P, Q 可逆；

6 向量组的线性关系

1) 线性表示, 与方程组解的关系: $Ax=b$;

2) 向量组的线性相关与线性无关: 定义与验证方法;

(i) $n+1$ 个 n 维向量必线性相关;

(ii) 缩短组无关, 则延长组也无关; 延长组相关, 则缩短组也相关;

3) 如何求极大无关组, 向量组的秩 (利用矩阵)

4) 向量组的等价: 若向量组 A 与向量组 B 可互相线性表示;

(i) 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 则 $r(A) \leq r(B)$;

(ii) n 维向量组 A 与 B 等价的充要条件: $r(A) = r(B) = r(A, B)$

7 线性方程组

1) 克莱姆法则: $Ax = b$; $x_i = \frac{|D_i|}{|D|}$, $D = |A|$; D_i : 用 b 换掉 D 的第 i 列;

2) $Ax = 0$ 则 $r(A) + r(S) = n$; S 是解集合; (最核心定理!)

如何求其基础解系;

3) $Ax = b$ 有唯一解, 有无穷多组解: $r(A) = r(A, b)$, 否则无解;

** 非齐通 = 齐通 + 非齐特 --- 最重要的计算基本功!

4) 线性方程组解的结构:

8 特征值, 特征向量

1) 定义: $Ax = \lambda x$; 特征多项式: $|\lambda E - A| = 0$; 特征方程: $(A - \lambda E)x = 0$;

2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr}(A)$ (矩阵的迹); $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n = |A|$;

3) 对应不同特征值的特征向量线性无关;

9 矩阵的相似: $P^{-1}AP = B$;

1) (i) $\lambda(A) = \lambda(B)$; (ii) $r(A) = r(B)$;

(iii) 相似必等价; (iv) 可同时对角化;

2) 方阵 A 相似于对角形的充分必要条件: A 有 n 个线性无关的特征向量! (核心定理!)

(i) 若 A 有 n 个互不相同特征值, 则必可对角化;

(ii) 若 A 的重根特征值的重数与其线性无关特征向量个数相同则可对角化;

(iii) k 重特征值最多对应 k 个线性无关的特征向量;

k 个线性无关的特征向量至少对应 k 重特征值; (考点)

10 二次型

1) **定理**: 实对称阵必正交相似于对角形: $P^{-1}AP = P^{\tau}AP = B$; ($P^{\tau}P = E$);

实对称阵不同特征值的特征向量必正交;

2) 二次型、标准形、规范形的定义;

二次型矩阵的定义: $f = x^{\tau}Ax$, A 是对称阵; 二次型的秩等于其矩阵 A 的秩;

3) 矩阵的合同, 合同变换; 合同变换: $C^{\tau}AC = B$, C 可逆;

惯性定理: 合同变换不改变二次型的惯性指数! (考点)

4) **定理**: 必有正交变换 P , $x = Py$, 使得二次型化为标准形 (其中系数为 A 的特征值);

必有可逆变换 C , $x = Cy$, 使得二次型化为规范形!

** 利用正交变换得到的标准形中的系数是矩阵 A 的特征值;

5) 熟悉利用配方法化二次型为规范形;

11 正定二次型与正定矩阵

- 1) 定义：任给非零向量 x , $f = x^T A x > 0$; A 则是正定矩阵;
- 2) 如何判别正定阵：(i) 用定义; (ii) 用特征值全大于零;
(iii) 利用赫尔维兹定理：各阶主子式都为正。

12 向量空间（数一）

- 1) 定义：对加法和数乘封闭的向量集合;
- 2) 向量空间的基：极大无关组; 维数：极大无关组所含向量的个数;
- 3) 坐标：基的线性表示 $x = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n$;
- 4) 基的过渡矩阵 P : $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) P$; $P = A^{-1} B$;
- 5) 坐标变换公式: $(y_1, y_2, \dots, y_n)^T = P^{-1} (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

核心定理与结论：

1 定理： $m \times n$ 阶矩阵 A 的秩为 $r(A)$ ，则 n 元齐次方程组 $Ax=0$ 的解集 S 的秩为 $n-r(A)$ ！

或者 $r(A) + r(S) = n$ ；

结论：若 $A_{m \times n} B_{n \times 1} = O$ ，则 $r(A) + r(B) \leq n$ ；

2 定理： n 阶方阵 A 相似于对角形的充分必要条件是： A 有 n 个线性无关的特征向量。

推论： n 阶方阵 A 相似于对角形的充分必要条件是： A 的重根特征值次数等于对应特征向量的个数；

3 定理：实对称阵 A 必正交相似于对角形，且对角元素为其特征值， $P^T A P = P^{-1} A P = \Lambda$ ；

推论：必存在正交变换 $X=PY$ ，使得二次型 $X^T A X$ 为标准形，且其系数对应 A 的特征值；

4 定理：可逆变换不改变二次型的惯性指数。

5 定理：对矩阵左（右）乘一个可逆阵相当于进行一系列初等行（列）变换；

结论：任何矩阵都可经过初等变换化为标准形： $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6 若向量组 A 可由向量组 B 线性表示，则 $r(A) \leq r(B)$ ；

结论：向量组 A 与向量组 B 等价的充要条件是： $r(A) = r(B) = r(A, B)$

7 若 $Ax = \lambda x$ ，则 λ 是 A 的特征值， x 是其相应的特征向量。

1 记 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A_{ij} 为 A 的代数余子式, 求 $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$

解: $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 A_{ij}$ 是所有代数余子式之和, 而 $A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{i1} + A_{i2} + A_{i3} + A_{i4}$ 相当于把第 i 行的四个数都换成 1, 最终结果为 -4

2 设 A 是 3 阶正交矩阵, $|A|=2$, 若 $|2A+B|=4$, 求 $|E + \frac{1}{2} AB^T|$

$$\text{解: } |E + \frac{1}{2} AB^T| = |AA^T + \frac{1}{2} AB^T| = |\frac{1}{2} A(2A^T + B^T)|$$

$$= \frac{1}{8} |A| |2A^T + B^T| = \frac{1}{4} |2A + B| = 1$$

3 已知 a_1, a_2, a_3, a_4 是3维列向量; 记矩阵 $A = (a_3, a_2, a_1)$, $B = (a_1 + 2a_2, a_2 + 2a_4, a_4)$

$C = (a_1, a_2, 2a_3 - a_4 + a_2)$, 若 $|A| = 2, |B| = -8$, 求 $|C|$

解: $|C| = |(a_1, a_2, 2a_3)| + |(a_1, a_2, -a_4)| + |(a_1, a_2, a_2)|$

$$= 2|a_1, a_2, a_3| - |a_1, a_2, a_4|$$

$$|a_1, a_2, a_3| = -|A| = -2; \quad |B| = |a_1, a_2, a_4| + |2a_2, a_2, a_4| + |2a_2, 2a_4, a_4| + |a_1, 2a_4, a_4|$$

所以: $|a_1, a_2, a_4| = |B| = -8, \quad |C| = 4;$

4 设 A 是元素全为 1 的 n 阶矩阵, (1) 求 $|aE + bA|$

(2) 若 $1 < r(aE + bA) < n$, 确定 a, b 满足的条件; 并求 $W = \{x | (aE + bA)x = 0\}$ 的维数

解 (1) $|aE + bA| = (a + nb) a^{n-1}$;

(2) 由题意, 必须 $(a + nb) a^{n-1} = 0$; 若 $a = 0$, 则 $r(aE + bA) = 1$, 矛盾,

所以 $a \neq 0, b \neq 0, (a + nb) = 0$; 代入, 易知 $r(aE + bA) = n - 1$

5 A B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times n$ 矩阵, 证明 (1): $\begin{vmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{vmatrix} = |E_n - AB| = |E_m - BA|,$

(2) 设 $\lambda \neq 0$, 证明: $|\lambda E - AB| = |\lambda E - BA|$

证: (1)利用分块矩阵的乘法与变换: $\begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & B \\ O & E_n - AB \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} E_m & B \\ A & E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m - BA & B \\ O & E_n \end{pmatrix}$ 两边同取行列式即证;

$$(2) \begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & B \\ A & \lambda E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & B \\ O & \lambda E - AB \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} E & B \\ A & \lambda E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & O \\ -\frac{1}{\lambda}A & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - \frac{1}{\lambda}BA & B \\ O & \lambda E \end{pmatrix}$$

两边同取行列式即得证结论。

例6 若 A 是 n 阶实方阵, 证明: $A^T A = O$, 则有 $A = O$

证明: 记 $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$; $A^T = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$;

易知 $A^T A$ 的主对角元为 $a_i^T a_i = \|a_i\|^2 \geq 0$; 只有 $a_i = 0$ 时才为零, 所以 $A = O$.

经纬考研数学: www.jingweimath.com

例7 设 A 是 n 阶可逆矩阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, (i) 证明 $(A^*)^* = |A|^{n-2} A$

(ii) 求 $r(A^*)$

证明: (i) $AA^* = |A|E$; $|AA^*| = |A||A^*| = ||A|E| = |A|^n$; 所以 $|A^*| = |A|^{n-1}$

$(A^*)^*(A^*) = |A^*|E = |A|^{n-1} E$; $(A^*)^*(A^*)A = |A|^{n-1} A$, 即 $(A^*)^*|A| = |A|^{n-1} A$ 得证结论!

(ii) 当 A 可逆时, A^* 也可逆, 则 $r(A^*) = n$;

当 $|A| = 0$ 时, 若 $r(A) < n-1$, 则 $A^* = O$, 所以 $r(A^*) = 0$;

若 $r(A) = n-1$, $AA^* = O$, 则 $r(A) + r(A^*) \leq n$, $r(A^*) \leq 1$.

A^* 中至少有一个非零元素, 所以 $r(A^*) = 1$.

8* 设向量组 a_1, a_2, a_3 线性无关, 判定下列向量组的线性相关性:

$$1) a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3; \quad 2) a_1 - a_2 + 2a_3, a_2 - a_3, 2a_1 - a_2 + 3a_3;$$

解: 1)*第一步: 先将题中的向量表示写成**矩阵形式** (这是关键步骤):

$$(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

第二步: 检验后面的数字矩阵 的行列式为1, 则可逆; 矩阵 (a_1, a_2, a_3)

与矩阵 $(a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3)$ 秩相同; 所以 给定向量组的线性无关。

$$2) \text{解法同上: } (a_1 - a_2 + 2a_3, a_2 - a_3, 2a_1 - a_2 + 3a_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

因为后面的数字矩阵的行列式为 0, 因此所给向量组的矩阵的秩小于3, 所以线性相关。

9 设 a_1, a_2 为两个线性无关的三维向量, b_1, b_2 是与 a_1, a_2 均正交的三维非零向量,

证明: (1) b_1, b_2 线性相关; (2) a_1, a_2, b_1 线性无关。

证明: (1) 由题知, $a_1^T b_1 = a_1^T b_2 = a_2^T b_1 = a_2^T b_2 = 0$, 即 $\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix} (b_1, b_2) = 0$,

$r\left(\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix}\right) + r(b_1, b_2) \leq 3$; 而 $r\left(\begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{pmatrix}\right) = 2$, 所以 $r(b_1, b_2) = 1$, 则 b_1, b_2 线性相关。

(2) 取三个数 k_1, k_2, k_3 , 使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 b_1 = 0$;

两边同乘 b_1^T , 得 $k_3 b_1^T b_1 = 0$; 因为 b_1 为非零向量, 所以 $k_3 = 0$;

代入, 又因为 a_1, a_2 线性无关, k_1, k_2 也必须为零, 所以, a_1, a_2, b_1 线性无关。

10 设 A 是三阶非零矩阵, 且满足 $A^2 = 0$, 若线性方程组 $Ax = b$ 有解, 则其线性无关解向量个数为多少?

解: 显然 $|A|=0$, 则 $0 < r(A) < 3$, 又 $AA = 0$, 则 $r(A) + r(A) \leq 3$

(A 的列向量属于 $Ax = 0$ 的解集 S ;) 所以必须 $r(A)=1$;

则 $Ax = 0$ 的解集有两个线性无关的向量 (基础解系为 ξ_1, ξ_2)

记 y^* 为 $Ax = b$ 的解, 则 $\xi_1 + y^*, \xi_2 + y^*, y^*$ 线性无关;

任给 $Ax=b$ 的一个解 y , 则 $y - y^*$ 是相应齐次组的解, 可由其基础解系线性表示,

$y - y^* = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2$; 由此可得 非齐次组的解都可由 $\xi_1 + y^*, \xi_2 + y^*, y^*$ 线性表示;

由此线性无关解向量个数为 3。

注: 秩的概念只用于线性 (向量) 空间

11 设 A 为 n 阶方阵,

问 (1) A 满足什么条件时, 存在 n 阶方阵 B (不等于单位阵 E), 使得 $AB=A$?

(2) 当 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ 时, 求所有的方阵 B 使得 $AB = A$.

解: (1) $AB = A$, 即 $A(B - E) = O$; 则只要 $r(A) < n$, $Ax = 0$ 有非零解, 则 B 存在。

$(B-E)$ 的列向量由方程组的解组成;

(2) 解 $Ax=0$, 可得 其基础解系为 $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $B = \begin{pmatrix} -2k_1 + 1 & -2k_2 \\ k_1 & k_2 + 1 \end{pmatrix}$

12 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为矩阵 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ 4 & -2 & b \end{pmatrix}$ 的一个特征向量;

(1) 求常数 a, b 的值, 以及 α 所对应的特征值;

(2) A 是否可对角化? 可以的话, 对其进行对角化。

解: (1)* 因为 $A\alpha = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ 4 & -2 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a+2 \\ b+2 \end{pmatrix}$, 又已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的一个特征向量,

由定义 $A\alpha = \lambda\alpha$, 则有: $\begin{pmatrix} 3 \\ a+2 \\ b+2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; 可得: $\lambda_1 = 3, a = b = 1$;

(2) 由于 A 已知, 先求 A 的特征值: 可以利用特征方程的性质来求特征值:

设另外两个特征值为 λ_2, λ_3 , 则 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |A| = 12$, 得 $\lambda_2\lambda_3 = 4$,

又 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7$, 得 $\lambda_2 + \lambda_3 = 4$, 所以 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$;

** 而 $r(A - 2E) = 2$, 即 $(A - 2E)x = 0$ 基础解系只含一个向量; 由此可知 A 不可对角化。

13 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, 已知 A 有 3 个线性无关的特征向量; $\lambda=2$ 是 A 的二重特征值。

求 x, y 以及可逆阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角型。

解: 由题意知: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, 又 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 10$, 所以 $\lambda_3 = 6$;

$\lambda = 2$ 是 A 的二重特征值, 且有两个线性无关的特征向量, 所以必须有 $r(A-2E) = 1$

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ x & 2 & y \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{可得: } x = 2, y = -2; \quad (\text{任意的 2 阶子式都为 0})$$

求特征向量: 对 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $(A - 2E)x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$; 得基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

对特征值 $\lambda_3 = 6$, $(A - 6E)x = 0$ 得基础解系: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\text{则可取 } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} ?$$

14* 设 3 阶矩阵 A 的各行元素之和为 2, 向量 $\beta_1 = (1, -1, 0)^T$, $\beta_2 = (0, 1, -1)^T$

是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解。

求 (1) A 的特征值和特征向量; (2) 求正交阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

解: 记 A 的三个列向量分别为: $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} (i=1,2,3)$, $A = (a_1, a_2, a_3)$

则各行元素之和意味着: $a_1 + a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 即 $(a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

由此可得一个特征值 $\lambda_3 = 2$, 相应的特征向量为 $\beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

又因为 β_1, β_2 是 $Ax=0$ 的**两个**线性无关的解, 由此也是特征值 0 相应的特征向量, 而且 0 是**二重根**;

由此可得三个特征值, 0, 0, 2, 以及三个特征向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;

(2) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ **单位正交化**即可得 Q

15 设 3 阶对称矩阵 A 的特征值为 $1, 2, -2$, $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 $\lambda_1=1$ 的特征向量;

记 $B = A^5 - 4A^3 + E$; 验证: α_1 是 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量。

解: 由题意*, $A\alpha_1 = \alpha_1$; 则 $B\alpha_1 = A^5\alpha_1 - 4A^3\alpha_1 + \alpha_1 = -2\alpha_1$;

所以 α_1 是 B 的属于特征值 -2 的特征向量;

* $\varphi(\lambda) = \lambda^5 - 4\lambda^3 + 1$; 所以 B 的特征值为: $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(-2)$, 可得: $-2, 1, 1$;

根据定理, 对称矩阵对应不同特征值的特征向量相互正交, 设矩阵 B 属于 1 的特征向量为 x ,

则有 $x^T\alpha_1=0$, 即 $x_1 - x_2 + x_3=0$; 可得其基础解系为: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

所以, B 的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

16* 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2;

求: (1) a 的值; (2) 求正交变换 $x = Qy$, 把 f 化成标准形; (3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

解: (1) 写出 A 的表示式: $A = \begin{pmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 利用 $r(A) = 2$, 容易得出 $a = 0$;

(2) 求 $|\lambda E - A| = 0$, 得 A 的特征值为 $0, 2, 2$;

对于 $\lambda_1 = 0$, 由 $(A - \lambda_1 E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 可得对应的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

对于重根 $\lambda_{2,3} = 2$, 由于 $(A - 2E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可得对应特征向量 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

单位正交化可得: $q_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 令矩阵 $Q = (q_1, q_2, q_3)$

则取正交变换 $x=Qy$, $f = x^T A x = y^T \Lambda y = 2y_2^2 + 2y_3^2$;

(3) 由上, $f = x^T A x = y^T \Lambda y = 2y_2^2 + 2y_3^2 = 0$, 得 $y_2 = 0, y_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}; \quad \text{则 } x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2; \quad x_3 = y_3;$$

可得: $x_1 = -x_2, x_3 = 0$ 即为 $f=0$ 的解。

或者利用配方法: $f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 = 0$,

则可得: $x_1 = -x_2, x_3 = 0$;

17 设 $A = E - 3\alpha\alpha^\tau$, 其中 α 是个三维列向量, 且 $\alpha^\tau\alpha=1$, 则 A 是否可逆? 是否正定阵?

解 (法1)* A 是对称阵; 考察 矩阵 $\alpha\alpha^\tau$ 的特征值: 因为 $r(\alpha\alpha^\tau)=1$, 所以最多只有一个非零特征值;

又其主对角线元素之和为 $\alpha^\tau\alpha=1$, 所以 $\alpha\alpha^\tau$ 的特征值为 $1, 0, 0$; 由此 $A = E - 3\alpha\alpha^\tau$ 的特征值为 $-2, 1, 1$, 所以 A 可逆, 但不是正定阵。

(法2) 因为 $A - E = -3\alpha\alpha^\tau$; 存在正交阵 P , 使得 $P^\tau(A - E)P = \begin{pmatrix} -3 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$,

* 易知 A 的特征值为 $-2, 1, 1$; A 可逆, 但不是正定阵。

(法3) 若 A 不可逆, 则 $(E - 3\alpha\alpha^\tau)x = 0$ 有非零解, 取一个解 y ;

即 $(E - 3\alpha\alpha^\tau)y = Ey - 3\alpha\alpha^\tau y = 0$; 显然 $\alpha^\tau y \neq 0$; 同乘 α^τ ; $\alpha^\tau y - 3\alpha\alpha^\tau y = 0$, 矛盾。

* 取非零向量 α , $\alpha^\tau(E - 3\alpha\alpha^\tau)\alpha = \alpha^\tau\alpha - 3\alpha^\tau\alpha\alpha^\tau\alpha = 1 - 3 = -2$; 所以 A 不是正定。

18 设 A 是三阶实对称阵, 满足 $A^3 + A^2 + A = 3E$, 若 $kA + E$ 是正定阵, 则 k 的取值范围?

解: 由题*, A 的特征值满足方程 $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 3 = 0$; $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 3) = 0$;

因为实对称阵的特征值为实数, 所以 A 的特征值为 $1, 1, 1$;

若 $kA + E$ 是正定阵, 则 $k > -1$ 即可。

19: 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与二次型 $x^T B x = 3x_1^2 + ax_3^2$ 的矩阵 B 合同, 则 a 的取值范围?

解: 先求 $|\lambda E - A| = 0$, 得 A 的三个特征值: $0, 3, -3$;

而 **合同变换** 不改变惯性指数, 因此 $a < 0$;

19' 二次型 $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的标准形*不能是:

A. $3y_1^2 + 2y_2^2$; B. $2y_1^2 - 5y_2^2$; C. $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$; D. $y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2$

解: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 2 \\ a & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $|A| = 1 - a^2$, 当 $a \neq 1, -1$, 时, A, B 不正确;

$a=1, a=-1$ 时, A 是正定阵, 所以 B 不正确。

注: 标准形并没有要求平方项系数是特征值; 但标准形之间的惯性指数相同。

20 设矩阵 A 是 n 阶实对称阵, 且 $A^2 = A$, $r(A)=r$ ($0 < r < n$); 证明(1) $E+A$ 是正定矩阵;

(2) 计算 $|E+A+A^2+\dots+A^k|$

解 (1)* 利用定义证明正定: 任给非零向量 x ,

$$x^T(E+A)x = x^Tx + x^TA^2x = x^Tx + (Ax)^T Ax > 0; \text{ 二次型正定, 所以 } A \text{ 正定};$$

(2) 矩阵方程 $A^2=A$, 则 A 的特征值满足 $\lambda^2 - \lambda = 0$; A 的特征值只可能是 0, 或 1;

由 $r(A)=r$ ($0 < r < n$), 则 1 是 A 的 r 重根特征值;

存在可逆阵 P ; $P^{-1}AP = \Lambda$ (主对角元有 r 个 1, 其余为 0)

$$|E+A+A^2+\dots+A^k| = |P^{-1}(E+A+A^2+\dots+A^k)P| = |E+\Lambda+\dots+\Lambda| = (1+k)^r$$

21 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + ax_3^2 + 2x_2x_3$ 经正交变换可化为标准形

$$y_1^2 + by_2^2 - y_3^2, \quad \text{求 } a, b \text{ 的值?}$$

解：正交变换不改变特征值（以及标准形），后一个二次型矩阵的特征值为 $1, b, -1$ ；

前一个二次型的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ ； $|\lambda E - A| = (\lambda - 2)(\lambda^2 - a\lambda - 1)$ ；

分析得知： $b=2, a=0$.

22 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ 的

规范形为 $y_1^2 + y_2^2$; (1) 求 a 的值; (2) 利用正交变换将 f 化为标准形

解: (1) 先写出二次型矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$, 由题, 正惯性指数为 2, 因此 A 有零根特征值;

$|A| = (2-a)(a+1)^2 = 0$, $a = 2$, 或者 $a = -1$, 舍去, 因为 $\text{tr}(A) = -3$, 与 A 无负特征值矛盾。

(2) $a=2$ 时, 解 $|\lambda E - A| = 0$, 得 A 的特征值为 0, 3, 3; 分别带入 $(\lambda E - A)x = 0$

对应 0 特征值的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$; 对应 3 的特征向量为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

施密特正交化, 可得 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\alpha_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$, 正交变换 $x = Py$, $P = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$, 标准形: $3y_2^2 + 3y_3^2$;

23* 三元二次型的矩阵 A 满足 $A^2 - 2A = 0$, 且 $\alpha_1 = (0, 1, 1)^T$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系;

(1) 求二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的表达式;

(2) 若二次型 $x^T(A + kE)x$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 求 k 的值.

解: (1) 由 $A^2 - 2A = 0$ 可知, A 的特征值为 0 或 2; 又由 α_1 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $r(A) = 2$,

且 0 是 A 的单特征值; 由此 A 的特征值为: 0, 2, 2;

或者: $AA = 2A$, $A(a_1, a_2, a_3) = 2(a_1, a_2, a_3)$, $Aa_i = 2a_i$, 由此 a_1, a_2, a_3 都是相应于 2 的

特征向量, 但 $r(A) = 2$, 所以只有两个向量线性无关, 则 2 是二重根;

设 $(x_1, x_2, x_3)^T$ 为 A 的属于 2 的特征向量, 与 α_1 正交, 得: $x_2 + x_3 = 0$, 可得

$\alpha_2 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, -1, 1)^T$ 是特征值 2 的特征向量, 取 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 可求得

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

(2) $A + kE$ 的特征值为 $k, k+2, k+2$, 对应规范形 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; 惯性指数: 两正一负; 所以 $-2 < k < 0$.

24 A 是 n 阶矩阵, 且满足 $A^2 + 2A = 3E$

(1) 证明 $r(A-E)+r(A+3E)=n$; (2) A 可对角化; (3) 如果 $r(A-E)=r$, 求行列式 $|A+E|$

证明: (1) 已知 $r(A-E)=r(E-A)$; 则 $r(A-E)+r(A+3E)=r(E-A)+r(A+3E)\geq r(E-A+A+3E)=n$;

又由条件得: $(A-E)(A+3E)=0$, 因此, $r(A-E)+r(A+3E)\leq n$, 结合起来可得 (1)。

(2) 对角化: 只需证明 A 有 n 个线性无关的特征向量; 不妨设 $r(A-E)=r$,

由 $(A-E)(A+3E)=0$, 则 $(A+3E)$ 的列向量都是相应于 $\lambda_1=1$ 的特征向量

由结论 (1) 知: $r(A+3E)=n-r$, 所以有 $n-r$ 个线性无关的向量;

同理, 因为 $(A+3E)(A-E)=0$, 可得, 相应于 $\lambda_2=-3$ 的特征向量个数为 r ,

合在一起可得 A 有 n 个线性无关的特征向量, 所以可对角化!

(3) 因为 $r(A-E)=r$ 则在对角形注对角线上有 $(n-r)$ 个 1 和 r 个 -3, 容易得 $|A+E|=(-1)^r 2^n$.

25 设 3 阶矩阵 A 满足: $A^3 - A^2 - 2A = 0$, 且 A 不可对角化,

问如下那个组合不可能是 A 的特征值 “

- (1) 2, 2, -1 (2) -1, -1, 2; (3) 2, 0, -1 (4) 2, 2, 2.

解: 由 A 满足的矩阵方程知, A 的特征值满足 $\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = 0$;

则 A 的特征值只能在集合 $\{0, -1, 2\}$ 中, 又 A 不可对角化, 所以 (3) 不可能。

26 已知 3 阶矩阵满足： $A^2 = 2A$ ，且 $r(A)=2$ ，证明 A 可对角化。

证：方法1：由 $A^2 = 2A$ ，得 A 的**可能**特征值为 0 和 2；

又因 $r(A)=2$ ，所以 $Ax=0$ 有非零解，由此 A 对应于特征值 $\lambda=0$ 有一个特征向量；

又 $(A-2E)A=0$ ；知 $r(A-2E)+r(A) \leq 3$ ，所以 $r(A-2E)=1$ ，（ $A \neq 2E$ ），

则 $(A-2E)x=0$ 有非零解，且基础解系含有 2 个向量，由此 对应于 $\lambda=2$ 有两个特征向量，

合起来：3 阶阵 A 有三个线性无关特征向量，所以可以对角化。

方法2：因为 $r(A) = 2$ ，则 $Ax = 0$ 基础解系有一个非零向量，所以 对应于 $\lambda=0$ 有一个特征向量；

设 $A=(a_1, a_2, a_3)$ ，不妨设 a_1, a_2 线性无关，由 $A^2 = 2A$ ，可得： $A(a_1, a_2, a_3)=2(a_1, a_2, a_3)$

即： $Aa_1 = 2a_1, Aa_2 = 2a_2$ ； 由此可得对应于 $\lambda=2$ 有两个线性无关特征向量。所以 A 可对角化。

注：矩阵可对角化的充分必要条件：有 n 个线性无关的特征向量！

27 设 A 是三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维线性无关的向量, 且:

$$A\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \quad A\alpha_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 - 2\alpha_3, \quad A\alpha_3 = \alpha_3$$

(1) A 是否可对角化: (2) 求 $(A-E)$ 的秩。

解: (1) (这类问题基本都是先将向量形式化为矩阵形式。) 由题知:

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{记 } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 记 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $P^{-1}AP = B$,

由此矩阵 A 和 B 相似, 可同时对角化。

* B 的特征值是 1, 2, 2, 对重根 2, 由于 $r(B - 2E) = 2$,

因此没有两个线性无关的特征值, 则 B 不可对角化, 由此 A 也不可对角化。

(2) $r(A-E) = r(B-E) = 2$.

28 设 A 是 3 阶矩阵, $r(A)=1$, 则对特征值 $\lambda=0$, 如下正确的是 ()

- (1) 必是 A 的二重特征根 (2) 至少是 A 的二重特征根
(3) 最多是 A 的二重特征根; (4) 可能是 A 的一, 二, 三重特征根

解** : 由 $r(A)=1$, 知 A 的所有 2 阶子式以及行列式都为 0, 所以:

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 = 0, \text{ 则有 } \lambda=0, 0, \text{ 以及 } \lambda=a_{11} + a_{22} + a_{33}. \text{ 答案 (2)}$$

或者: 对应 0 特征值的特征方程为 $Ax=0$; 若 0 是单根, 则只对应一个线性无关的特征向量, 则 $r(A)=2$, 与题意矛盾。所以 0 至少二重根。

29 A 为 2 阶矩阵, α 与 β 是 A 的两个实特征向量, 且 $||\alpha + \beta|| = ||\alpha - \beta||$, 则 ()

A. $r(A)=1$; B. $r(A)=2$; C. A 必相似于对角形; D. A 必与单位阵合同

解: $||\alpha + \beta||^2 = (\alpha + \beta)^T(\alpha + \beta) = \alpha^T\alpha + 2\alpha^T\beta + \beta^T\beta;$

$$||\alpha - \beta||^2 = (\alpha - \beta)^T(\alpha - \beta) = \alpha^T\alpha - 2\alpha^T\beta + \beta^T\beta;$$

由此可得 $\alpha^T\beta = 0$, 则 α 与 β 正交, 因此线性无关;

二阶矩阵有两个线性无关的特征向量, 所以必相似于对角形! C 正确。

30 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维非零向量, 其中 $A\alpha_1 = \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_3, A\alpha_3 = 0$

(1) 验证 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关; (2) 求矩阵 A 的特征值和特征向量

证明: (1) 利用定义: 设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$,

两边乘 A 得: $k_1\alpha_2 + k_2\alpha_3 = 0$, 再乘 A , 即可知只有 k_1, k_2, k_3 都为 0 时上式才成立,

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 因为 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

所以 A 的特征值与这个数字矩阵的相同: $0, 0, 0$

对应的特征向量为 α_3 因为 $r(A)=2$, 所以只有一个线性无关特征向量。 (此题可用于反例)

31 已知 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维线性无关的列向量, 若

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3, \quad \text{求 } |A^*|$$

解: 由上面式子可得: $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ 记 } P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3); \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

则 $AP = PB$; $|A||P| = |P||B|$; 由题意知, 矩阵 P 是可逆的,

所以 $|A| = |B| = -4$, 由此 $|A^*| = |A|^2 = 16$.

32 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $m < n$ 是方程 $A^T A x = 0$ 有非零解的 ()。

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 即非充分也非必要

解: 有非零解的充分必要条件是 $r(A^T A) < n$;

而 $r(A^T A) = r(A)$; $m < n$ 只是 $r(A) < n$ 的一个充分条件! A 正确。

33 n 阶矩阵 A 和 B 具有相同特征值是 A 与 B 相似的 () 条件?

1 充分必要 2 必要非充分 3 充分非必要 4 既非充分也非必要

解: (2) 必要非充分;

即: 即使 A, B 有相同的特征值也不见得相似; 但是特征值不同则肯定不相似!

34 设 a, b 是三位单位正交列向量, 则二次型 $f = x^T(2aa^T + bb^T)x$ 的规范形为 ()

A. $y_1^2 + y_2^2$; B. $y_1^2 - y_2^2$; C. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; D. $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$;

解: 首先 $r(2aa^T + bb^T) \leq r(2aa^T) + r(bb^T) = 2$; 所以 C, D都不对;

又 $(2aa^T + bb^T)a = 2a$; 以及 $(2aa^T + bb^T)b = b$,

所以 二次型矩阵特征值为 1, 2; 因此 A正确。

35 对 n 阶矩阵 A 和 B , 下列正确的是 ()

- 1 若 A 和 B 有相同的特征值, 则 A 和 B 相似;
- 2 A 的特征值中非零特征值的个数与 A 的秩相等
- 3 若 $A = \alpha\beta^T$, α, β 为列向量, 则 A 相似于对角形;
- 4 若 A 可对角化, 且 A 和 B 相似, 则 A, B 与同一对角阵相似。

解: 1 具有相同特征值只是相似的必要条件;

2 反例 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (加上非零特征值互不相同)

3 显然不一定

4 正确。相似矩阵同时可对角化, 且相似于同一对角形!

36 设三元二次型 $f = x^T A x$ 经正交变换得标准形: $y_1^2 - 3y_2^2$, 若 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 和 $\beta = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

分别是 $(A - E)x = 0$, 和 $(3E + A)x = 0$ 的解, 求 $Ax = 0$ 的解, 以及 $|A + 2E| = ?$

解: 因为是正交变换, 所以标准形的系数即是二次型的矩阵 A 的特征值, $1, -3, 0$;

而 α 和 β 恰好分别是矩阵对应于特征值 1 和 -3 的特征向量;

$Ax=0$ 的解即是 A 的关于特征值 0 的特征向量, 设为 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

由于对称矩阵 A 的不同特征向量两两正交, 得 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, -x_1 + x_2 = 0$, 解得: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

矩阵 $(A + 2E)$ 的特征值是 $3, -1, 2$, $|A + 2E| = -6$

37 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵 且 $BA=0$;

求 (1) 矩阵 B ; (2)若 B 的第一列是 $(1, 2, -3)^T$ 时, 求 $(B - E)^4$

解: (1)先求出参数 a . 由 $BA=0$ 且 B 非零, 则必须 $|A|=0$, 可得 $a=1$

由 $A^T B^T = 0$, 则 B^T 的列向量属于方程组 $A^T x = 0$ 的解集。求解这个线性方程组, 可得基础解系为:

$$\xi = k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ 则 } B^T = \begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \dots\dots B = \begin{pmatrix} -k_1 & k_1 & k_1 \\ -k_2 & k_2 & k_2 \\ -k_3 & k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

(2)若 B 的第一列如题所示, 则 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; 求 B 的特征值: 由于 $r(B)=1$, 可知 B 至少有

两个特征值为 0, 而 B 的迹为 2, 所以, B 的特征值为: 0, 0, 2; 而且对应于 0 特征值有两个特征向量,

因此 B 可对角化。存在可逆阵 P , 使得 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1}(B - E)P = P^{-1} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} P$;

则可得 $(B - E)^4 = E$

38 设 A 为 3 阶实对称阵, $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, 且 矩阵 $(A+3E)$ 不可逆,

(1) 求 A 的特征值和特征向量; 并求正交矩阵 Q , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$

(2) 若二次型 $x^T (A + kE)x$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 求 k ?

解: 由题可知 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 所以 A 的特征值为 2, -1

对应是特征向量分别为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 和 $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; 又 $|A+3E|=0$, 所以, -3 是 A 的另一个特征值;

设其特征向量为 $\alpha_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, α_3 与 α_1, α_2 正交, $\alpha_1^T \alpha_3 = 0$, $\alpha_2^T \alpha_3 = 0$, 可解得: $\alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

--正交阵 Q : 显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已经正交, 所以单位化它们即可得 Q .

(2) 因为二次型 $x^T (A + kE)x$ 的特征值为 $2+k, k-1, k-3$, 所以只要 $1 < k < 3$ 即可。

39* 设向量组 $\alpha_1 = (a, 2, 1)^T$, $\alpha_2 = (-2, 3, 2)^T$, $\alpha_3 = (-1, 1, 0)^T$, $\beta = (1, b, c)^T$

问当 a, b, c 满足什么条件时：(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表示；

(2) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示；

(3) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一；并求出表达式。

解：这实际上是一个方程组解的问题：若能表示，意味着存在 3 个数 x_1, x_2, x_3

使得 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$ ，也即方程组 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta$ 有解 $\leftrightarrow r(A) = r(A, b)$

由此，(1) 唯一线性表示，即 $|A| \neq 0$ ；解得 $a \neq -\frac{3}{2}$ ；当 $a = -\frac{3}{2}$ 时则可产生后两种情形。

(2) 将 $a = -\frac{3}{2}$ 代入增广矩阵 $(A, b) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & b \\ 1 & 2 & 0 & c \end{pmatrix}$ ，化简可得： $c - 2b \neq 2$ 时，不能线性表示

(3)* $c - 2b = 2$ 时，表示式不唯一；

求表达式则是求出非齐次线性方程组的解（留给读者解答）。重点例题（基本功）

解答：

经纬数学

经纬数学 www.jingweimath.com

40 已知齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解为: $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$

求方程组 (II) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解。

解: 解析: 由题意, 满足 (II) 的解一定满足 (I), 显然 **(I)的解集包含了(II)的**, (II)的解是(I)的一部分

取决于 k_1, k_2 的取值。 [(II)中的最后一个方程相当于**加了一个条件**;]

所以, 将 (I)的通解代入(II)中, 得到 k_1, k_2 的值即可。

代入 (II)的最后一个方程, 可得 $3k_1 + 4k_2 = 0, k_2 = -\frac{3}{4}k_1$, 则有 (II)的通解为:

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \\ 1 \\ \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$$

41 设 4 元齐次线性方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, 以及齐次方程 (II) 的通解为:

$$k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{问方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出。}$$

解: 若两个方程组有公共解, 则 (II) 的通解代入 (I) 应该成立 (存在某个 k_1, k_2)。

$$\begin{cases} -k_2 + k_1 + 2k_2 = 0 \\ k_1 + 2k_2 - k_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{得 } k_1 = -k_2, \quad \text{则向量 } k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ 是两个方程组的公共解。}$$

42* 已知 线性方程组:
$$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + (2 - \alpha)x_2 + (2 + \beta)x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$$

且 $(1, -1, 1, -1)^T$ 是该方程组的一个解,

求 (1) 方程组的通解; (2) 该方程组满足 $x_1 = x_3$ 的全部解。

解: 将解 $(1, -1, 1, -1)^T$ 代入方程组, 可求得 $\alpha = \beta = 1$; 再代回方程组可得通解为:

$$x = k(-2, 1, -1, 2)^T + (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T; \quad (\text{特解?})$$

(2) 求满足 $x_1 = x_3$ 这个**条件**的解, 即把通解中的相关项代入这个方程, 求出具体的 k 值。

即: $-2k = -k + \frac{1}{2}$, $k = -\frac{1}{2}$, 代入通解的式子即得满足条件的解: $(1, -1, 1, -1)^T$

43 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = 2AB + E$, A^{-1} 的特征值为 $1, 1, \frac{1}{2}$, 求 $|AB - BA + 2A|$

解：对 $A^2 = 2AB + E$ 左乘 A^{-1} , 右乘 A , 得 $A^2 = 2BA + E$, 所以 $AB = BA$;

$$|AB - BA + 2A| = |2A| = 8 \times 1 \times 1 \times 2 = 16.$$

43' 设 A 是 n 阶矩阵, 且 $(A + E)^2 = 0$, 验证 A 是可逆的。

证明：方法一： $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E = 0$, $A(A + 2E) = -E$, 所以 $|A| \neq 0$, 则可逆。

方法二：由 $A^2 + 2A + E = 0$, 知 A 的特征值只能为 -1 , 由此 A 是可逆的。

44 设 $\alpha = (-1, 0, 1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, 求 $|aE - A^n| = ?$

解: 因为 $\alpha^T\alpha = 2$, 所以 $A^2 = \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = 2\alpha\alpha^T$

$$A^n = 2^{n-1}\alpha\alpha^T = 2^{n-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1 \quad 0 \quad 1) = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{由此可得: } |aE - A^n| = \begin{vmatrix} a - 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & a & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & a - 2^{n-1} \end{vmatrix} = a^2(a - 2^n);$$

或者*: 因为 $A\alpha = \alpha\alpha^T\alpha = 2\alpha$, 所以 A 的非零特征值为 2 , 而 $r(A)=1$, 则 A 的其余特征值均为 0 ;

$$A \text{ 为对称阵, 存在正交阵 } P, \text{ 使得 } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$|aE - A^n| = |P^{-1}(aE - A^n)P| = \begin{vmatrix} a - 2^n & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^2(a - 2^n).$$

45 设 3 阶矩阵 A 与三维向量 x , 使得 x, Ax, A^2x 线性无关, 且 $A^3x = 2Ax - A^2x$;

记 $P = (x, Ax, A^2x)$ 求 3 阶矩阵 B , 使得 $P^{-1}AP = B$; 并求 $|A+E|$

解: $AP = A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 2Ax - A^2x)$

$$= (x, Ax, A^2x) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{记 } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{则 } P^{-1}AP = B;$$

$$|A+E| = |P^{-1}(A+E)P| = |B+E| = -2$$

46 设矩阵 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, 若 a_1, a_2, a_3 线性无关, 且 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$

则方程组 $Ax = a_1 + 4a_4$ 的通解为:

解: 由 a_1, a_2, a_3 线性无关可知, $Ax=0$ 基础解系只有一个自由变量;

$a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ 可以写成 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$;

由此可得 $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系;

由 $Ax = a_1 + 4a_4$ 可知, $y^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ 为其一个特解

非齐次方程组的通解 = 齐通 + 非齐特: $k\xi + y$

47* 设 $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 是四阶矩阵, 方程组 $Ax = b$ 的通解为: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$B = (a_3, a_2, a_1, b + a_4), \quad \rho = a_1 - a_2 + 2a_3$$

验证 (i) a_1 能否由 a_2, a_3 线性表示? (2) 求 $Bx = \rho$ 的通解。

解 (i)* 由题意: $(a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, 则有 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$, 所以 (i) 成立。

(ii) 由 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = b$, 即 $a_1 + a_2 - 2a_3 - a_4 = b$; 则 $B = (a_3, a_2, a_1, a_1 + a_2 - 2a_3)$

先求 $Bx = 0$ 的通解: 由 $r(A) = 3$, 且 B 的列向量由线性相关的 a_1, a_2, a_3 生成, 则 $r(B) = 2$.

****观察**可得 $Bx = 0$ 的两个基础解系向量: $\xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 非特解: $\eta = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

48 设 A 为 n 阶方阵, 证明存在正整数 N , 使得当 $M > N$ 时都有 $r(A^M) = r(A^N)$

证: 由矩阵秩的性质知: 对任给正整数 K 都有 $r(A^{K+1}) \leq r(A^K)$;

所以 $\{r(A^K)\}$ 是一个单减数列, 且下界大于等于零, 因此有极限, 最终会是某个正整数 (不妨设为 C),

则当 $M > N$ 时, 有 $r(A^M) = r(A^N) = C$ 。

注:(1) 若 A 可逆, 则显然成立, $N=1$;

(2) 若 A 可对角化, $N=1$;

(3) 所以只需要证明 A 不可逆的情形, 即 A 有 0 特征值, 且为重根的情形;

如果熟悉若当型, 则很容易得证。

49 设 A 为 n 阶幂零矩阵, B 为 n 阶方阵, 且 $AB+BA=B$, 求证 $B=O$

证: A 为幂零阵, 则存在正整数 k , 使得 $A^k = O$,

又 $AB = B(E - A)$, 可得 $O = A^k B = A^{k-1} AB = A^{k-1} B(E - A) = A^{k-2} B(E - A)^2 = B(E - A)^k$,

对幂零矩阵 A , $(E-A)$ 是可逆阵, 所以 $B=O$.

幂零矩阵只有零特征值。

50 3 阶矩阵满足 $A^2 - 2A = 3$, 且 $|A + 2E| = 25$, 求 $\begin{vmatrix} O & 3A^{-1} + A^* \\ \frac{1}{2}A^T & A \end{vmatrix}$

解: 由 $A^2 - 2A = 3$ 可知 A 的特征值是 3 和 -1 的组合;

矩阵 $(A+2E)$ 的特征值是 5 和 1 的组合;

由 $|A + 2E| = 25$ 可知 A 的特征值为 3, 3, -1;

$$\begin{vmatrix} O & 3A^{-1} + A^* \\ \frac{1}{2}A^T & A \end{vmatrix} = (-1)^{3 \times 3} \left| \frac{1}{2}A^T \right| |3A^{-1} + A^*| = -\frac{1}{8} |3E + AA^*|$$

$$= -\frac{1}{8} |-6E| = 27.$$

51 (1) 两个矩阵 A, B 行数相同, A 行满秩, B 的列向量组是否可有 A 的列向量组线性表示?

(2) 已知矩阵 $AB = A + B$, 验证 $r(A) = r(B)$

证明 (1) 也即证明是否存在 X 使得 $(a_1, a_2, \dots, a_n)X = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, 即 $AX = B$

因为 $r(A) = r(A, B)$ (都是行满秩; 等于 A 的行数), 所以方程组有解, 则可以线性表示。

(2) 由 $A(B - E) = B$, 所以 $r(B) \leq r(A)$,

又 $(A - E)B = A$, $r(A) \leq r(B)$, 则 $r(A) = r(B)$

52 设三阶矩阵 A 的某行元素都是 1, 且 向量 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

是 A 的特征向量,

问: 1) A 是否可对角化; 2) A 的迹 $\text{tr}(A) = ?$

解: 不妨设 A 的第一行元素都为 1, 记 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

由题意: $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1$, 即 $\begin{pmatrix} 2 \\ * \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$; 可知 $\lambda_1 = 2$; 同理可得: $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$;

所以 A 可对角化, $\text{tr}(A) = 3$

或者: 由于 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 线性无关, 所以 A 可对角化。

53 用配方法化二次型为规范形,并写出所用变换的矩阵

$$1) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3;$$

$$2) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3;$$

$$3) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

解: 1) $f = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3$
 $= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 2x_2^2 + (2x_2 + x_3)^2 = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 ;$

$$Y = PX, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{变换矩阵为 } P^{-1}$$

54 设3阶矩阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 其中 α_1, α_2 是 3 阶矩阵 A 对应特征值 $-1, 1$ 的特征向量,

$$\text{且: } (A - E)\alpha_3 - \alpha_2 = 0$$

(1) 证明 P 可逆;

(2) 计算 $P^{-1}A^*P$

解:(1) 由题意, $A\alpha_1 = -\alpha_1$, $A\alpha_2 = \alpha_2$, 且 α_1, α_2 线性无关; $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$

设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$, 则 $k_1A\alpha_1 + k_2A\alpha_2 + k_3A\alpha_3 = 0$, 即

$$-k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0, \text{ 两式相减可得: } 2k_1\alpha_1 - k_3\alpha_2 = 0, \text{ 则 } k_1 = k_3 = 0,$$

代回得 $k_2\alpha_2 = 0$, 由此可得 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 必线性无关;

$$(2) \quad A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 记 } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |P^{-1}AP| = |B| = -1$$

$$A^* = |A|A^{-1} = -A^{-1}; \quad \text{则 } P^{-1}A^*P = -P^{-1}A^{-1}P = -B^{-1}$$

55 设 A 为 n 阶方阵, 若 $r(A-E)+r(A+E)=n$, 证明: $A^2 = E$

证明: 如果 $A = E$, 或者 $A = -E$, 则命题得证;

因此 $0 < r(A - E) < n$, 以及 $0 < r(A + E) < n$;

则 $(A-E)x=0$ 有非零解, 其基础解系所含线性无关向量个数为 $n - r(A-E) = r(A+E)$;

也即矩阵 A 对应于特征值 1 的特征向量个数为 $r(A+E)$ 个;

同理, A 对应于特征值 -1 的特征向量个数为 $r(A-E)$ 个;

而矩阵对应于不同特征值的特征向量是线性无关的, 且 $r(A-E)+r(A+E)=n$,

也即矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量;

所以 A 相似于对角形, 其对角元素为 1 或者 -1 ;

由此得证 $A^2 = E$ 。

56 设 A, B, C 是 n 阶方阵, 且有 $(A + E)C = 0$; $B(A^T - 2E) = 0$; $r(C) + r(B) = n$

证明: A 可对角化, 并给出对角阵。

证: 由* $(A + E)C = 0$, 可知 C 的 n 个列向量都是矩阵 A 对应于特征值 -1 的特征向量,

其线性无关特征向量的个数为 $r(C)$;

同理, 由 $B(A^T - 2E) = 0$; 即 $(A - 2E)B^T = 0$

知 B^T 的列向量是矩阵 A 对应于特征值 2 的特征向量,

其线性无关向量的个数为 $r(B^T) = r(B)$;

而 $r(C) + r(B) = n$;

由矩阵对应于不同特征值的特征向量线性无关, 所以 A 有 n 个线性无关的特征向量,

因此相似于对角形, 对角形矩阵主对角线有 $r(C)$ 个 -1 , $r(B)$ 个 2 .

57 对方阵 A, B , 若 $(E-AB)$ 可逆, 证明 $(E-BA)$ 也可逆

证明: 法一: 利用行列式 $\begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ B & E-BA \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} E & -A \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A \\ B & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E-AB & 0 \\ B & E \end{pmatrix}$

可得 $|E-AB|=|E-BA|$

法二: 利用特征值: 由 $(E-AB)$ 可逆, 则其没有 0 特征值,

设 $(E-AB)x = \lambda x, (\lambda \neq 0);$ 则 $Bx - BABx = \lambda Bx, (E-BA)Bx = \lambda Bx;$

且 $Bx \neq 0$; 否则 AB 有特征值为 1, 与 $|E-AB| \neq 0$ 矛盾;

可知 $(E-BA)$ 与 $(E-AB)$ 的非零特征值相同。

而 $(E-AB)$ 有 n 个非零特征值, 所以 $(E-BA)$ 也有 n 个非零特征值, 因此可逆。

结论: AB 与 BA 的非零特征值相同; 若一个矩阵可逆, 则 AB 与 BA 相似。

58 记 A 为元素全为 1 的矩阵, 若 $X^2 = A$, 求矩阵 X

解: 由于 A 是实对称阵, 所以 A 相似于对角形;

又 $r(A)=1$, 则 A 的特征值只有一个非零的, 等于 n (矩阵的迹) ;

则存在正交阵 P , 使得 $P^T A P = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 则 $P^T X^2 A P = P^T X P P^T X P = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

得 $P^T X P = \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $X = P \begin{pmatrix} \sqrt{n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^T = \sqrt{n} (p_1 p_1^T)$, p_1 是对应特征值为 n 的特征向量。

59 若矩阵 A, B 都是正定矩阵, 且 $AB=BA$, 证明 AB 也是正定矩阵

证明: 由 $AB=BA$, 以及 A, B 正定, 则 AB 是对称阵;

设 λ 是 AB 的特征值, x 为其相应的特征向量, $ABx = \lambda x$,

$$BABx = \lambda Bx, \quad x^T BABx = \lambda x^T Bx; \quad (Bx)^T ABx = \lambda x^T Bx;$$

由于 A, B 都是正定阵, 则 $(Bx)^T ABx > 0$, 以及 $x^T Bx > 0$,

所以 必须 $\lambda > 0$; 因此 AB 正定!

59' A 是正定矩阵的充分必要条件是 $A = U^T U$, 其中 U 是可逆方阵。

60 已知 R^3 两个基为 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1) 求由前基到后基的过渡矩阵;

(2) 若向量 x 在前基的坐标为 $\alpha = (1, 1, 3)^T$, 求它在后基的坐标。

解 (1) 初等行变换 $(A \ B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (E \ P);$

P 即为过渡矩阵;

(2) 在后基的坐标 $\beta = P^{-1}\alpha = (-8, -1, 5)^T$.

注: 记过渡矩阵为 P , 则 $(b_1, b_2, b_3) = (a_1, a_2, a_3)P$; 所以 $P = A^{-1}B$;

对 (A, B) 只进行初等行变换, 得: $(E, A^{-1}B)$

61 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

是 $\mathbb{R}^3$ 的两组基, 求在两组基下有相同坐标的向量。

解: 记所求向量为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, 相当于满足 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3$;

记 $A = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3)$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, 即求解 $Ax=0$ 的非零解,

解得其基础解系为 $\xi = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; 则所求坐标向量为 $k\xi$.

知识点：三元线性方程组 $A_{m \times 3}X = b$ 解的几何意义：

(1) 每个线性方程都是 3 维几何空间中的一个平面； $\mathbf{a}_{i1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{i2}\mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{i3}\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_i$ ($i=1, 2, 3$)

(2) $r(A)=3=r(A, b)$ 时 方程组 $Ax=b$ 的唯一解表示 m 个平面有唯一交点；

(3) $r(A)=r(A, b)=2$ 时，这 m 个平面共直线，直线方程由线性无关的那两个方程组成；

(4) $r(A)=r(A, b)=1$ 时，这 m 个平面共面，这平面是由其中任何一个方程表示的；

(5) $r(A) = 2 \neq r(A, b)$ 时，有两两相交的平面，取决于 A 的行向量；

(6) $r(A) = 1 \neq r(A, b)$ 时，所有平面平行。

知识点：平面上， $A_{m \times 2}X = b$ 解的几何意义是平面直线之间的关系：平行，相交，重合等。

例62：在空间直角坐标系XYZ 中，三张平面 $\pi_i: a_ix + b_iz + c_iz = d_i (i = 1,2,3)$,

的位置如图所示，记 $\alpha_i = (a_i, b_i, c_i)$, $\beta_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$,若 $r \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = m, r \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = n$

则： A. $m=1, n=2$ B. $m=n=2$ C. $m=2, n=3$ D. $m=n=3$

解：（解析）（这是一个代数与几何的综合题）根据图示，这三个平面共线，因此三个平面方程组成三元一次方程组有**无穷多组解**，由此 $m=n=2$ 。

注：若 $m=n=1$ 则表示三个平面共面，也就是只有一个平面（其余两个可由这个平面表示）；

若 $m=n=3$ 则方程组有唯一解，表示三个平面相交于空间一点。

63 已知直线 $\frac{x-a_2}{a_1} = \frac{y-b_2}{b_1} = \frac{z-c_2}{c_1}$ 与直线 $\frac{x-a_3}{a_2} = \frac{y-b_3}{b_2} = \frac{z-c_3}{c_2}$ 相交于一点,

法向量 $\alpha_i = (a_i \ b_i \ c_i)^T \ (i = 1, 2, 3)$ 则

- A. α_1 可由 α_2, α_3 线性表示; B. α_2 可由 α_1, α_3 线性表示;
C. α_3 可由 α_1, α_2 线性表示; D. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关

解析: 将直线方程写成参数形式: $x = a_2 + a_1 t, y = b_2 + b_1 t, z = c_2 + c_1 t$; 以及

$x = a_3 + a_2 t, y = b_3 + b_2 t, z = c_3 + c_2 t$; 即

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} t$; 以及 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} t$; 两直线相交意味着存在 t_1, t_2 使得

$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} t_2$; 易知 只有 C 是绝对正确的。

64 在平面 XOY 中, 方程 $a_ix + b_iy = c_i$ ($i = 1, 2, 3$) 表示三条直线,

记 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$, 问下列情形下矩阵 A 的秩与矩阵 (A,C) 秩的关系?

(i) 三条直线平行; (ii) 三直线两两相交; (iii) 三直线相交于一点

解: 解析方程组
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

(i) 三直线平行意味着三个斜率相等, 直线无交点, 则 $r(A)=1$, $r(A,C)=2$;

(ii) 三直线两两相交, 则 $r(A)=2$,

(iii) 相交于一点, 则 $r(A)=2$, 且 $r(A,C)=2$

作业题: 四种直线图形与方程组 (解以及系数) 的关系

Thank you

经纬考研数学

www.jingweimath.com