

考研数学极值与凹凸性专题

- 剖析极值与凹凸性的定义
- 扩展概念与理论
- 整理解题思路
- 真题解析

经纬考研数学

www.jingweimath.com

极值与凹凸性问题是近来考研数学的必考点之一，经常包括填空题（较难）和计算题，分值在 17 分左右。主要包括：

- 1，一元函数的极值点，极值与最值，单调性；
- 2，一元函数的拐点，曲线的凹凸性等；
- 3，二元函数的极值，最值，以及条件极值（拉格朗日乘子法）；

- 极值定义：函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，对去心邻域 $U(x_0)$ 内的任一点 x 有

$f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$)，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值（极小值）；

- 极值是个局部概念！
- 极值的定义没有要求函数连续；
- 极值可能在驻点、或者不可导点达到；
- 必要条件：函数在 x_0 处可导，且在 x_0 处取的极值，则 $f'(x_0) = 0$ ——驻点；
- 第一充分条件：若在函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 某去心邻域内可导，且 $f'(x)$ 变号，
则 x_0 必是极值点：先正后负为极小；先负后正处取得极大；
- 第二充分条件：函数在 x_0 处具有二阶导数， $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ 则
(1) $f''(x_0) > 0$ 为极小值点； (2) $f''(x_0) < 0$ 为极大值点；
- 最值：极值 + 边界值，多出现在应用题；
- 若函数可导，且只有一个极值点，则这个点也是最值点；
- 极值点的两侧单调性改变-----是单调性的分界点。

凹凸性与拐点相关内容

- 定义：若 $f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $\lambda \in (0,1)$

则称 $f(x)$ 为凹函数（图形为凹）； $\lambda = \frac{1}{2}$ 时是高等数学中的定义

Tips: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 表示介于 x_1 与 x_2 之间的任何点。

- 几何意义：函数值小于割线值；也即函数曲线在割线之下；
- 若函数在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 内有一阶和二阶导数则：如下结论相互等价：
 - 1) $f(x)$ 为凹函数；
 - 2) $f'(x)$ 为增函数；
 - 3) $f''(x) \geq 0$ ；
 - 4) 对 I 上任何两点 x_1, x_2 ，都有 $f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)$ （几何意义）
- $f(x)$ 为 I 上凹函数的充要条件：对于 I 上任给的三点 $x_1 < x_2 < x_3$ ，总有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

- 拐点：
 - 1) 定义：函数在区间 I 上连续，曲线凹凸性改变的点称之为曲线的拐点 $(x_0, f(x_0))$
 - (2) 必要条件： $f''(x_0) = 0$ ；
 - (3) 拐点第一充分条件： $f''(x)$ 在 $x = x_0$ 两边异号；
 - (4) 拐点第二充分条件： $f'''(x_0) \neq 0$ ；
 - (5) 拐点可能在 $f''(x)$ 不存在的点达到。
- 结论：若函数 $f(x)$ n 阶可导，且在 x_0 点处的 $(n-1)$ 阶导数都为 0， n 阶导数 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ；
 - (i) n 为偶数时， x_0 为极值点；大于 0 极小值点，小于 0 为极大值点；
 - (ii) n 为奇数时， $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。
- 注：在 $f(x)$ 满足可导的前提下，极值点和拐点不是同一个点；
- 但不可导的情形有可能是同一个点；例： $f(x) = |x(x-2)|$ 在 $(0, 0)$ 和 $(2, 0)$ 点

例1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有定义, 则 ()

(A) 当 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 单调递增时, $f(0)$ 是极小值

(B) 当 $f(0)$ 是极小值时, $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 单调递减, 在 $(0, 1)$ 单调递增

(C) 当 $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 是凹的时, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1, 1]$ 单调增加

(D) 当 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 在 $[-1, 1]$ 单调增加时, $f(x)$ 的图形在 $[-1, 1]$ 是凹的

解析: 本题考察的是极值与凹凸性概念。

A 选项中两个半区间 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 都没有包含 $f(0)$,

而题目条件只是 $f(0)$ 有定义, 因此可以取任何值, 所以 A 错误;

B 选项, 考虑到极值是个局部概念, 只要求在 0 点的邻域内是最小即可, 所以 B 也不正确;

D选项考察的是充分条件，也即是说 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 是增函数，保证不了 $f(x)$ 是凹函数；

考虑反例 $y = (x^2 + 2x)(x - 1)$

利用几何意义： $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$ 是割线的斜率，

再看C选项，利用凹函数的定义：对任给的 x, y ，以及 $0 < \lambda < 1$,

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y);$$

设 $\lambda = \frac{x_2 - x_1}{1 - x_1}$, $x = 1, y = x_1$, 显然 $x_2 = \lambda + (1 - \lambda)x_1 > x_1$;

代入定义式： $f(x_2) = f[\lambda + (1 - \lambda)x_1] < \lambda f(1) + (1 - \lambda)f(x_1)$,

将 λ 的表达式代入整理可得： $\frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1} < \frac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1}$, 所以 C 正确！

例2. 已知函数 $f(x) = \int_0^x e^{t^2} \sin t dt$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \cdot \sin^2 x$, 则 ()

- A. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 也是 $g(x)$ 的极值点 ;
- B. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y = g(x)$ 的拐点 ;
- C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点 ;
- D. $(0,0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 也是曲线 $y = g(x)$ 的拐点 ;

解: $f'(x) = e^{x^2} \sin x$; $x = 0$ 时, $f'(x) = 0$;

$$f''(x) = e^{x^2} 2x \sin x + e^{x^2} \cos x; \quad f''(0) = 1$$

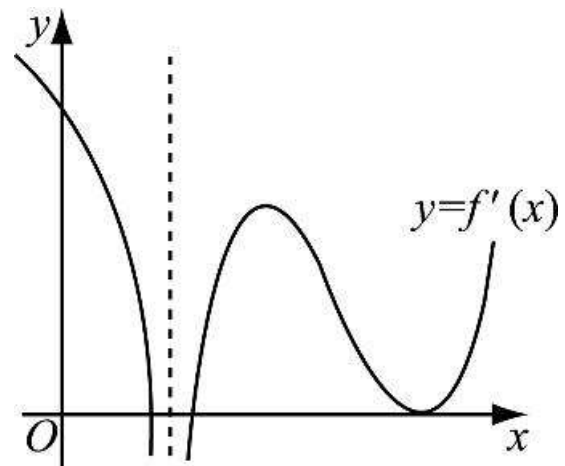
所以 $x=0$ 是极小值点; 又由保号性, 0 点的邻域内二阶导数不变号, 所以 $(0, 0)$ 不是拐点;

$g'(x) = e^{x^2} \sin^2 x + 2 \sin x \cos x \int_0^x e^{t^2} dt$ 是个偶函数, 0 点周围不变号, 所以不是极值点;

$g'(x)$ 是偶函数, 则 $g''(x)$ 是奇函数, 因此在 0 点变号, 且 $g''(0) = 0$, 所以是拐点。B 正确。

例3： 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，则（ ）

- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点
- (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点
- (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点
- (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点



解析：极值点：函数的单调性改变；一阶导数变号；

（可能在 $f'(x) = 0$ 的点，以及一阶导数不存在的点）

拐点：凹凸性改变（一阶导函数的单调性改变）；二阶导数变号；

可能在 $f''(x) = 0$ 以及二阶导数不存在的点：两侧变号

答案：（B）